Neprekidnost funkcije u tački

Definicija Funkciju $f: X \to Y$ nazivamo neprekidnom u tački $x_0 \in X$, ako je ona definisana u x_0 i u nekoj njenoj okolini i ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

odnosno, ako je granična vrijednost u x_0 jednaka vrijednosti funkcije $f(x)$ u tački x_0.
Drugim riječima, $f(x)$ je neprekidna u x_0 ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$$

Označimo sa $\Delta x = x - x_0$, gdje Δx nazivamo priraštajem argumenta.
Veličinu $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ nazivamo priraštajem funkcije koji odgovara priraštaju argumenta Δx.
Tada možemo da kažemo da je funkcija $f(x)$ neprekidna u x_0, ako je njen priraštaj $\Delta f(x_0)$ beskonačno mala funkcija, kad $\Delta x \to 0$, tj

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\left(|\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta f(x_0)| < \varepsilon\right),$$

tj $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$

Svojstva neprekidnih funkcija

1. Funkcija koja je neprekidna u nekoj tački je ograničena u nekoj okolini te tačke.
2. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u x_0 i $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), onda postoji okolina tačke x_0 u kojoj je $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

3. Ako su f i g neprekidne u tački x_0, onda su i funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (ako je $g(x_0) \neq 0$) takođe neprekidne u tački x_0.

4. Ako za funkcije f i g važi nejednakost $f(x_0) > g(x_0)$ ($f(x_0) < g(x_0)$) i f i g neprekidne u tački x_0, onda postoji okolina tačke x_0 u kojoj je $f(x) > g(x)$ ($f(x) < g(x)$).

5. (Neprekidnost složene funkcije) Neka je funkcija $g(x)$ neprekidna u tački x_0, a funkcija f neprekidna u tački $y_0 = g(x_0)$. Tada je složena funkcija $f(g(x))$ neprekidna u tački x_0 i važi:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)).$$

Jednostrana neprekidnost i tačke prekida f-je

Definicija Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački x_0 s lijeve (s desne) strane ako je

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

$$\left(f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right)$$

Odavde slijedi da se neprekidnost funkcije $f(x)$ u tački x_0 može definisati na sljedeći način:
Funkcija $f(x)$ je neprekidna u x_0 ako je ona definisana u nekoj okolini tačke x_0 i ako je $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. (tj ako postoje lijevi i desni limes u x_0 i jednaki su vrijednosti funkcije u x_0)

<u>Definicija</u> Tačka x_0 se naziva tačkom prekida funkcije $f(x)$ ako funkcija $f(x)$ nije definisana u toj tački ili ako nije neprekidna u toj tački.

<u>Definicija</u> Neka je x_0 tačka prekida funkcije $f(x)$. Tada imamo sljedeće slučajeve:

1) ako postoje $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ i $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ i ako je $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, onda se x_0 naziva <u>prekidom prve vrste</u> funkcije $f(x)$

2) ako je $f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$ onda se x_0 naziva tačkom otklonjivog prekida.

3) ako u x_0 ne postoji $f(x_0-0)$ ili $f(x_0+0)$ ili su ove granične vrijednosti jednake beskonačnosti, onda je x_0 <u>prekid druge vrste</u> funkcije $f(x)$.

Neprekidnost nekih elementarnih funkcija

1. Konstantna funkcija $f(x)=C$, $\forall x\in X$ je neprekidna u svakoj tački x_0, pošto je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C=f(x_0)$.

Analogno, za svako $x\in\mathbb{R}$ neprekidna je i funkcija $f(x)=x$.

Odavde slijedi neprekidnost funkcija

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ polinoma i racionalne funkcije

$$g(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m},$$

naravno $g(x)$ je neprekidna u svim tačkama osim u onim u kojima je imenilac jednak nuli.

2. Trigonometrijske funkcije $\sin x, \cos x, tg x, ctg x$ su takođe neprekidne u oblastima gdje su definisane.

Pokažimo neprekidnost funkcije $\sin x$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$

$$|\Delta \sin x_0| = |\sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}\right| \le$$

$$\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

Ovo zbog činjenice da je $\left|\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}\right| \le 1$ i

$|\sin\Delta x| \le |\Delta x|, \forall \Delta x$.

Odavde slijedi, da ako $|\Delta x| < \delta = \varepsilon$ onda je

i $|\Delta \sin x_0| < \varepsilon$, tj $\sin x$ je neprekidna funkcija u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$.

3. Funkcije $f(x) = a^x, a>0$ i $g(x) = \log_a x$, $a>0, a \neq 1$ su takođe neprekidne funkcije u svakoj tački gdje su definisane.

Važne granične vrijednosti

1. $$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Neka je $\{x_n\}$ proizvoljan niz koji konvergira ka $+\infty$, tj $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i neka je $k_n = [x_n]$ - cijeli dio od x_n. Tada je $k_n \le x_n < k_n+1 \le x_n+1 < k_n+2$ i važi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} < \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\cdot\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^2$$

Pošto $x_n \to +\infty, n\to\infty$, onda i niz

$k_n = [x_n] \to +\infty$, $n\to\infty$, pri čemu je $k_n \in \mathbb{N}$.

Odavde i iz toga što je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e$ i

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^2 = 1$ (kao podniz niza $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$)

imamo da je

$$e \le \lim_{x_n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le e$$

Odakle slijedi da je $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

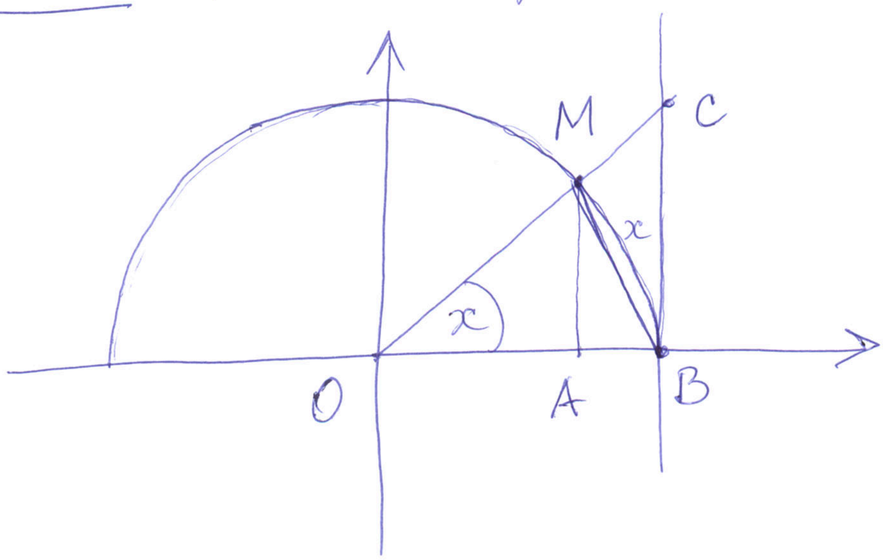
Slučaj $x_n \to -\infty$ se svodi na prethodni slučaj zamjenom $y=-x$.

Posljedica $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

Da bi ovo dokazali dovoljno je uvesti smjenu $\frac{1}{x}=y$, pri čemu ~~je~~ onda $y\to\pm\infty$ kad $x\to\pm 0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Dokaz Uzmimo jedinični krug



Posmatraćemo površine trouglova $\triangle OBM$, $\triangle OBC$ i površinu kružnog odsječka $\triangleleft OBM$.

Jasno je da je $OM = OB = 1$

$$P_{\triangle OBM} = \frac{OB \cdot AM}{2} = \frac{1 \cdot \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$$

gdje je x radijalna mjera ugla $\sphericalangle MOB$, a onda je x i dužina luka $\overset{\frown}{MB}$, gdje je $0 < x < \pi/2$.

$$P_{\triangle OBC} = \frac{OB \cdot BC}{2} = \frac{1 \cdot tg x}{2} = \frac{tg x}{2}.$$

Za površinu kružnog odsječka $P_{\triangleleft OBM}$, postavimo proporciju:

$$\pi : 2\pi = P_{\triangleleft OBM} : x$$

Odavde, $P_{\triangleleft OBM} = \dfrac{x}{2}$.

Jasno je da važi nejednakost

$$P_{\triangle OBM} < P_{\triangleleft OBM} < P_{\triangle OBC}.$$

Odavde imamo da je

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg x}{2}$$

tj.

$$\sin x < x < tg x \quad /: \sin x, \quad 0 < x < \pi/2$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{ili} \quad \boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1}$$

Pošto je $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, po teoremi o uklještenju je

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

Zaista,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log_a (1+x)^{1/x} =$$

$$= \log_a \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \log_a e$$

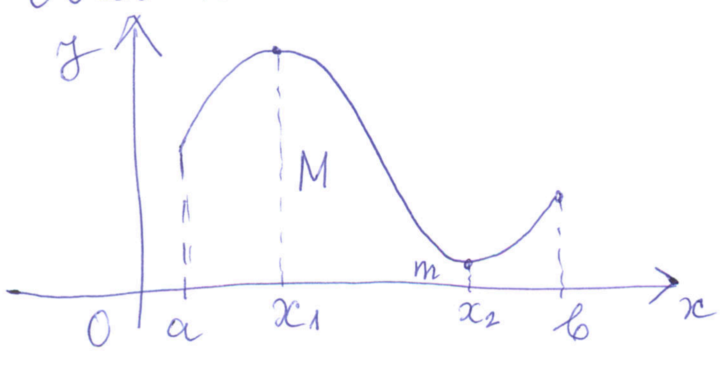
Za $a=e$ je $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

Neprekidnost funkcije na intervalu

Definicija Funkcija $f(x)$ je neprekidna na intervalu $[a,b]$, ako je neprekidna u svakoj unutrašnjoj tački tog intervala, pri čemu je neprekidnost u tački a neprekidnost s desna, a u tački b neprekidnost s lijeve strane.

Ovdje ćemo dati nekoliko teorema sa važnim svojstvima funkcija koje su neprekidne na intervalu (zatvorenom).

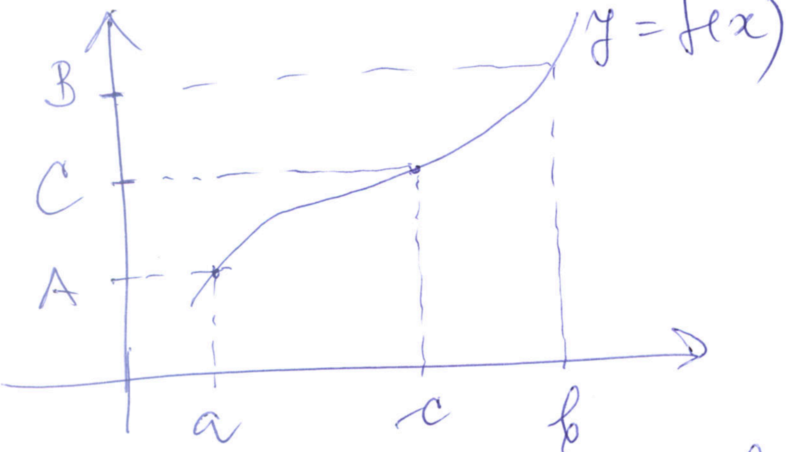
Teorema 1 (Vajerštrasova teorema) Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$ onda ~~je~~ ona dostiže svoju najmanju i najveću vrijednost na tom intervalu.



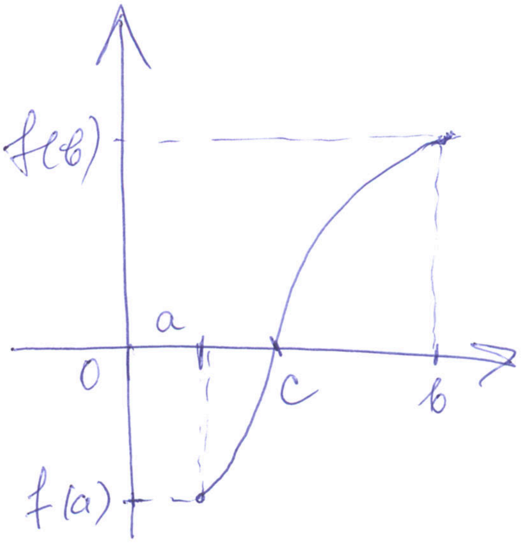
Na slici je data neprekidna funkcija $f(x)$ koja dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost u tačkama x_1 i x_2, pri čemu je najveća vrijednost M, a najmanja m. Jasno je da je onda za svako $x \in [a,b]$ $m \le f(x) \le M$.

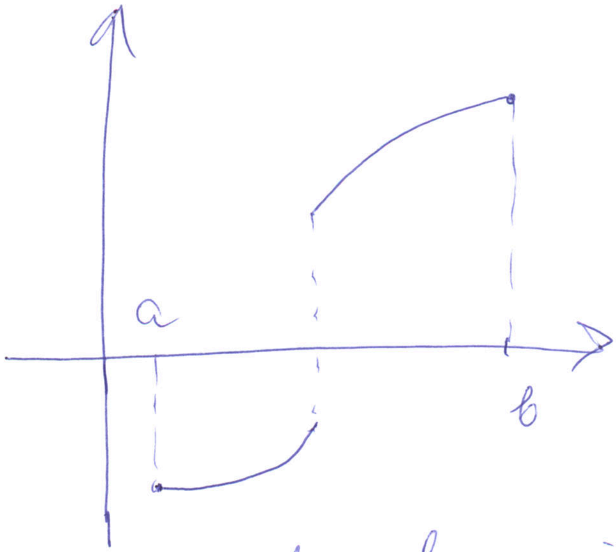
<u>Posljedica</u> (Vojerštrasove teoreme) Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$ onda je ona ograničena na tom intervalu.

<u>Teorema (Bolcano-Košijeva)</u> Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$ i $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A \neq B$, tada funkcija $f(x)$ uzima sve vrijednosti koje se nalaze između A i B, (tj $\forall C \in \mathbb{R}$, koje se nalazi između A i B $A \le C \le B$ (ako je $A<B$), ili $B \le C \le A$ $(B<A)$, postoji $c \in [a,b]$ takvo da je $f(c)=C$).



<u>Posljedica</u> Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$ i ako na krajevima intervala uzima vrijednosti različitog znaka, tj $f(a)\cdot f(b)<0$, tada postoji tačka $c \in [a,b]$ takva da je $f(c)=0$.

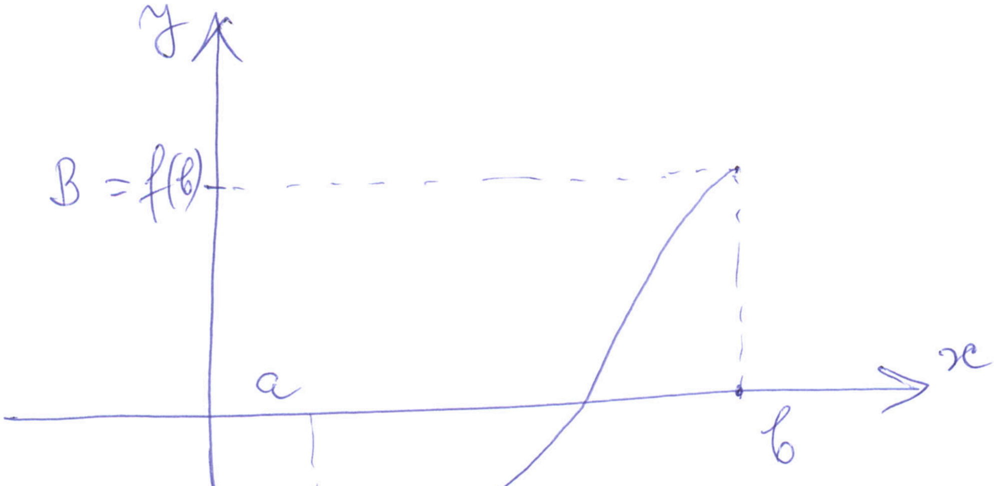




Na slici gore vidimo da prekidna funkcija ne mora da siječe x-osu.

Neprekidnost inverzne funkcije

Teorema Ako je funkcija $f(x)$ definisana, strogo monotona (rastuća ili opadajuća) i neprekidna na intervalu $[a,b]$, onda inverzna funkcija f^{-1} je definisana, jednoznačna, strogo monotona i neprekidna na intervalu $[A,B]$, gdje je $f(a)=A$, $f(b)=B$.



Odavde slijedi neprekidnost funkcija $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$.